



Dirección General de Computo y de  
Tecnologías de Información y Comunicación



# **CURSO: TRANSFERENCIA DE ENERGÍA**

Doctor Rafael Fernández Flores

Trabajo realizado con el apoyo del  
Programa UNAM-DGAPA-PAPIME  
PE110517



# **ESTADO NO ESTACIONARIO CON GRADIENTES**

(COORDENADAS NO CARTESIANAS)

# PROBLEMA

¿Cómo encontrar la solución a la ecuación de difusión en coordenadas cilíndricas y esféricas?



# OBJETIVOS

**1** Conocer las ecuaciones a las que se llega al separar las variables en geometrías cilíndrica y esférica.

**2** Conocer la manera de encontrar soluciones a la ecuación de Bessel

**3** Entender la relación entre las condiciones a la frontera y el tipo de función que es solución de la ecuación

**4** Usar las soluciones gráficas para resolver problemas Multidimensionales

**5** Operar el libro de Excel con el que se obtienen las soluciones



# MENÚ

- **EL LAPLACIANO EN OTROS SISTEMAS DE COORDENADAS**
- **CILINDRO CONDUCTOR**
  - Transferencia por convección
  - Aislado
- **ECUACIÓN DE BESSEL**
  - **SOLUCIÓN ANALÍTICA**
    - Relación condiciones de frontera/ soluciones
  - **MÉTODO GRÁFICO Y ANÁLISIS MULTIDIMENSIONAL.**
  - **USO DE LA HOJA DE CÁLCULO**
- **ESFERA CONDUCTORA.**
  - **SOLUCIÓN ANALÍTICA**
    - Relación condiciones de frontera/ soluciones
  - **MÉTODO GRÁFICO**
  - **USO DE LA HOJA DE CÁLCULO**

## LO GENERAL

La ecuación de difusión describe la conducción de calor en estado no estacionario, cuando no hay fuentes de generación de calor.

$$\partial T / \partial t = \alpha \nabla^2 T$$

Donde  $\alpha$ , la difusividad térmica, es el cociente  $k/\rho C_p$

Esta ecuación representa una gran familia de fenómenos, para aplicarla a la solución de un caso particular es necesario fijar la geometría y las condiciones de frontera que lo describen.



LO PARTICULAR



# EL LAPLACIANO SE ESCRIBE DE DIFERENTES FORMAS DE ACUERDO CON LOS SISTEMAS DE COORDENADAS

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

-----  
 $\partial f / \partial r$ )

# MÉTODOS DE TRABAJAR LAS SOLUCIONES

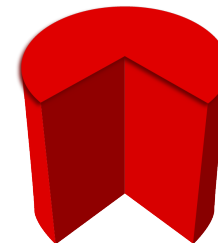
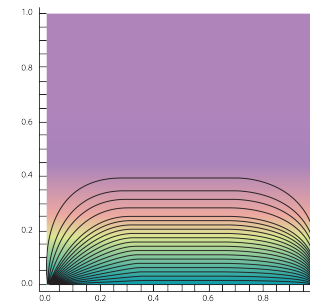
## Analítico

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \eta Z = 0$$

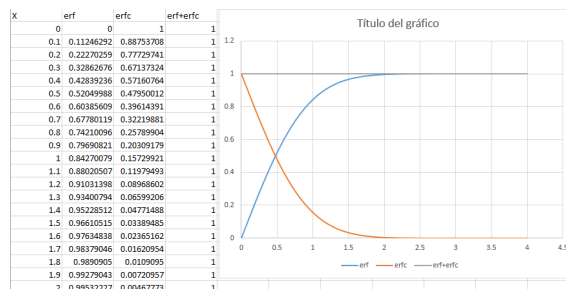
$$\frac{d^2 \phi}{d\phi^2} + \gamma \phi = 0$$

$$\frac{d^2 R_\gamma}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_\gamma}{dr} + \left( \beta^2 - \frac{\gamma^2}{r^2} \right) R_\gamma = 0$$

## Gráfico

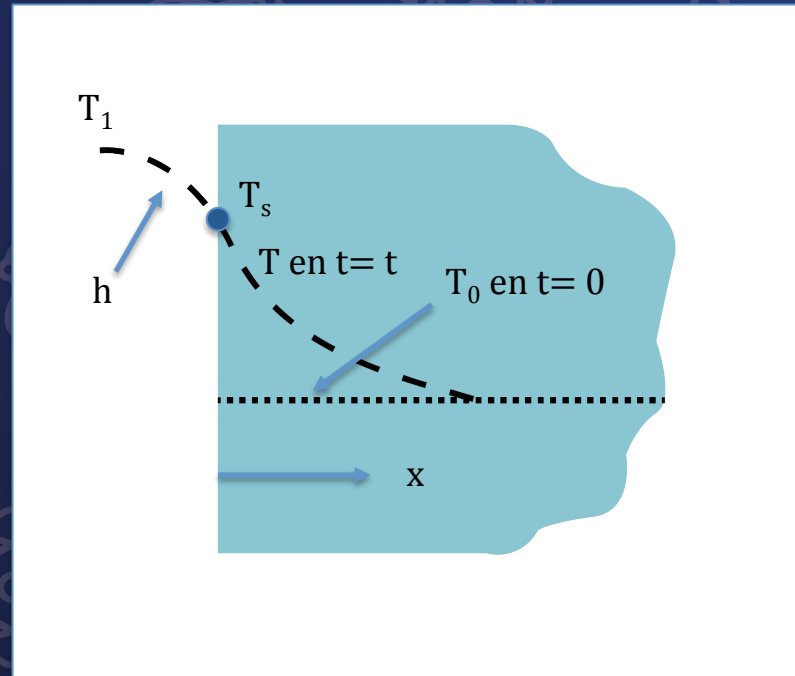
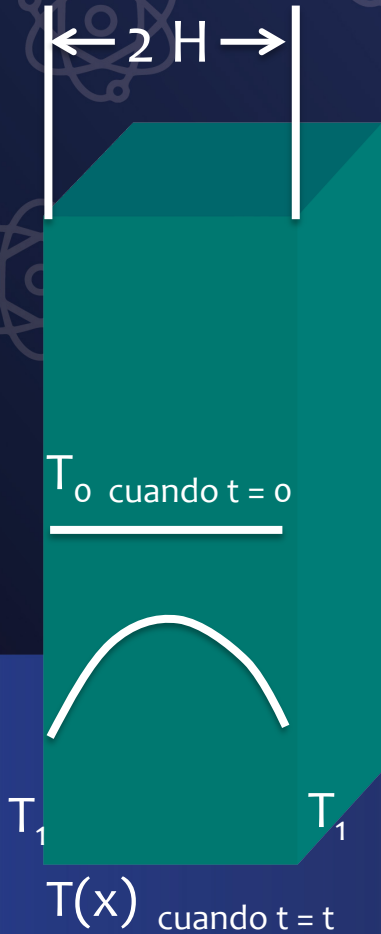


## Simuladores de Mathematica



## Excel

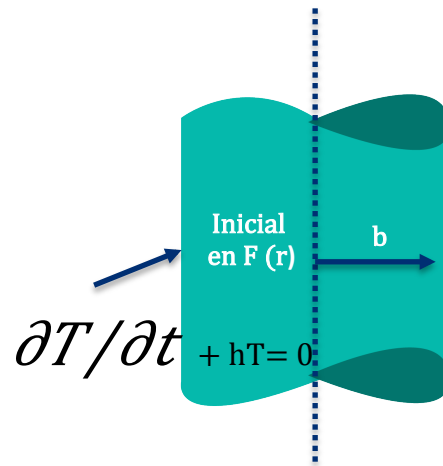




Geometría Cartesiana

LA CLASE ANTERIOR

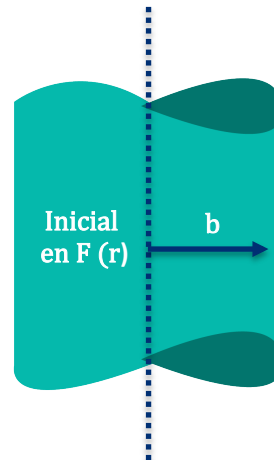
EN ESTA CLASE.  
CILINDRO CONDUCTOR



a) La frontera pierde calor por convección  
«Misma» ecuación

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



Pero en geometría cilíndrica

$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_b = 0$   
b) La frontera se considera aislada

$T(x, t) = \tau(t) X(x)$  Se obtuvo por el método de la separación de variables

La solución tiene dos factores, uno exponencial  $\tau_m(t) = e^{-\lambda_m t}$

y otro, una suma de senos y cosenos  
(Series de Fourier) con diferentes frecuencias

$$X_m(x) = (A_m \cos \lambda_m x + B_m \operatorname{sen} \lambda_m x)$$

Existen un número infinito de esas soluciones, las etiquetamos con un subíndice  $m$

Las frecuencias permitidas

$$\lambda_{2n+1} = (2n+1) \pi / 2H$$

Se calculan a partir de las condiciones de frontera.

Con lo que finalmente, la expresión explícita de la solución es una suma de esos productos:

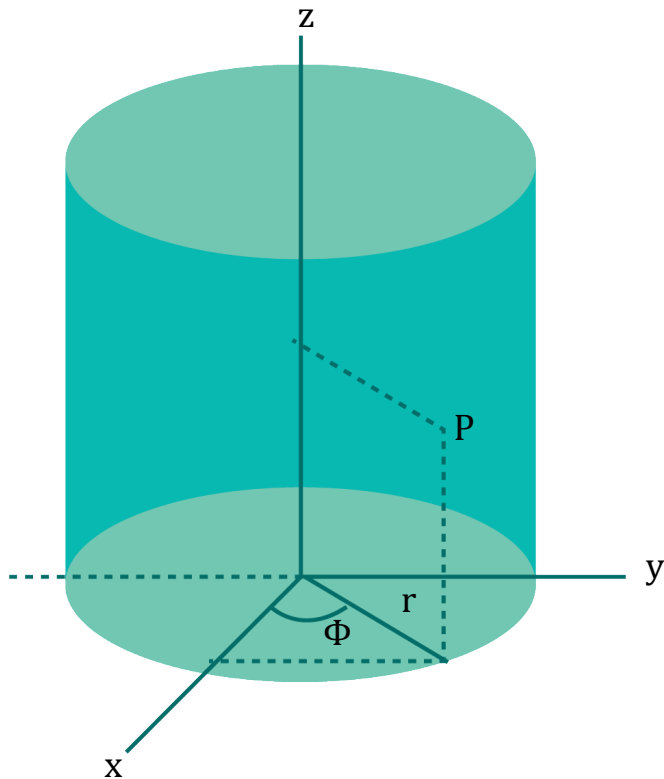
$$T(x, t) = 4/\pi (1/1 \exp^{-12n^2 \alpha t / 4H^2} \operatorname{sen} 1\pi x / 2H + 1/3 \exp^{-32\pi^2 \alpha t / 4H^2} \operatorname{sen} 3\pi x / 2H + 1/5 \exp^{-52\pi^2 \alpha t / 4H^2} \operatorname{sen} 5\pi x / 2H + \dots)$$

LA SOLUCIÓN DE LA PLACA DE ESPESOR  
2H MEDIANTE SEPARACIÓN DE VARIABLES.



# Separación de variables en coordenadas cilíndricas

Al separar las variables, habrá 3 ecuaciones espaciales, una para cada coordenada.



$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \eta Z = 0$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\phi^2} + \gamma \phi = 0$$

$$\frac{d^2 R_\gamma}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_\gamma}{dr} + \left( \beta^2 - \frac{\gamma^2}{r^2} \right) R_\gamma = 0$$

Y una para la coordenada temporal

$$d\tau(t)/dt + \alpha \lambda^2 \tau(t) = 0$$

La solución para la parte temporal es

$$\tau(t) = e^{-\alpha \lambda^2 t}$$

# ECUACION DE BESSEL

Si sólo hay conducción a lo largo de  $r$ , la única ecuación espacial que hay que resolver es:

$$d^2 R_Y / dr^2 + 1/r dR_Y/dr + (\beta^2 - r^2 / r^2) R_Y = 0$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación de Bessel de orden  $\gamma$ .

Siendo  $\gamma$  un número real.

La ecuación tiene una singularidad en el origen.

La ecuación de Bessel modificada de orden cero la encontramos en el estudio de la aleta circular

$$d^2 \Theta / d\rho^2 + 1/\rho d\Theta / d\rho + n$$

El Kreider (y los libros de matemáticas) la escriben así:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2) y = 0$$

Para resolverla se propone una solución de la forma:

$$y(x) = x^\gamma \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Cuya solución es la función de Bessel de orden p:

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (p+1)(p+2)\dots(p+k) \Gamma(p+1)} x^{2k+p/2}$$

## SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE BESSEL

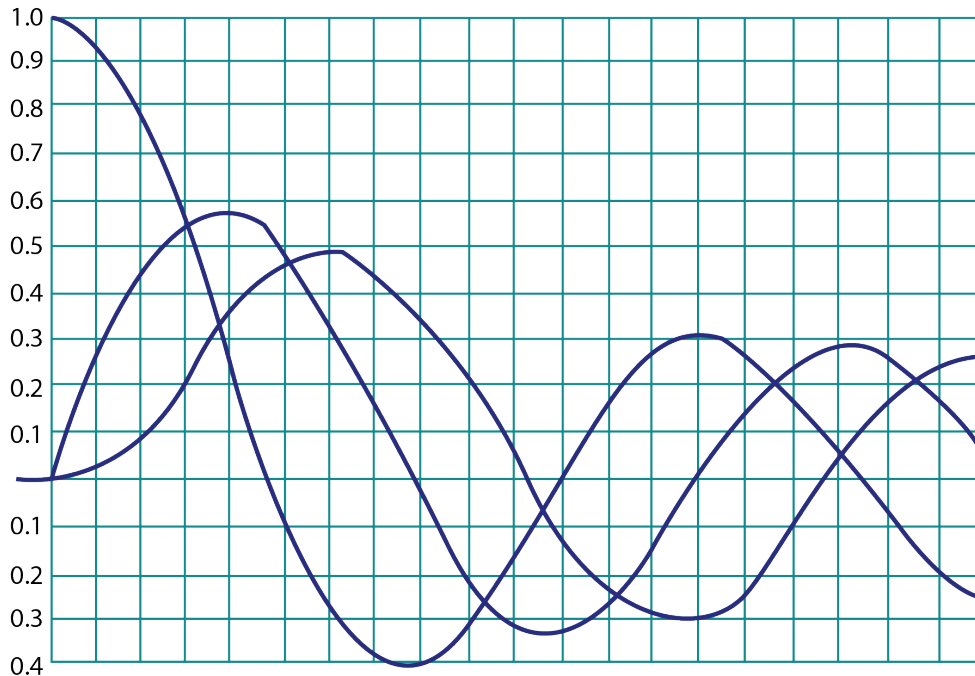
Es decir existen una infinidad de soluciones “etiquetadas” con un subíndice  $p(\gamma)$

Y los de física así:

$$\frac{d^2 RY}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dRY}{dr} + (\beta^2 - \gamma^2/r^2) RY = 0$$



Si  $p$  es un número entero  $n$ .



Si  $n$  es un entero no negativo:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

Para  $n = 0$

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

## ACTIVIDAD

Usar el simulador de Mathematica para graficar la serie de potencias de  $J_0$ ,  $J_1$  y  $J_2$  *para diferentes número de sumandos*.

Comparar los resultados de cada aproximación con los valores proporcionados por Excel y por Mathematica.

---

Comentar sobre los errores de truncamiento de las series.

Como las condiciones a la frontera cuando hay flujo de calor se expresan en términos de la derivada de  $J_\gamma$ , es útil conocer las siguientes fórmulas de recurrencia:

$$xJ'_{p+1} - 2pJ_p + xJ_{p-1} = 0$$

$$J_{p+1} - 2pJ'_p - J_{p-1} = 0$$



$$xJ'_p + pJ_p = xJ_{p-1}$$

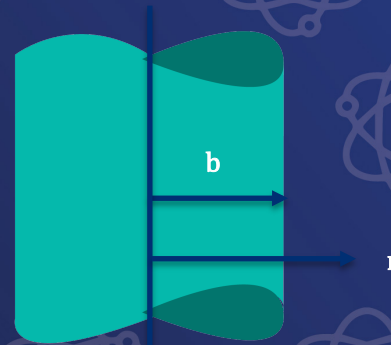
$$xJ'_p - pJ_p = -xJ_{p+1}$$

RELACIONES DE RECURRENCIA DE  
LAS FUNCIONES DE BESSEL



La función  $R_v(\beta_m, r)$ , la norma  $N(\beta_m)$ , y los valores  $\beta_m$  de la ecuación diferencial

Sujeto a las condiciones límite



No	Condiciones límite De $r = b$	$R_v(\beta_m, r)$	$1/N(\beta_m)$	Valores propios $\beta_m^2$ resultados posibles de
1	$dR_v/dr + hR_v = 0$	$J_v(\beta_m r)$	$\frac{2}{J_v(\beta_m b)} \cdot \frac{\beta_m^2 m}{b^2 (h^2 + \beta_m^2 - m^2) - \gamma^2}$	$\beta_m J'_v(\beta_m b) + h J_v(\beta_m b) = 0$
2	$dR_v/dr = 0$	$J_v(\beta_m r)^*$	$\frac{2}{J_v(\beta_m b)} \cdot \frac{\beta_m^2 m}{b^2 (\beta_m^2 - m^2 - \gamma^2)^*}$	$\beta_m J'_v(\beta_m b) = 0^*$
3	$R_v = 0$	$J_v(\beta_m r)$	$\frac{2}{J_v(\beta_m b)}$	$J_v(\beta_m b) = 0$

\* Para este caso particular  $\beta_0 = 0$  el valor propio con  $v=0$ , entonces la función es  $R_v = 1$  y la norma  $1/N(\beta_0) = 2/b^2$

## RELACIÓN CONDICIONES DE FRONTERA/ SOLUCIONES

Para la condición de frontera  $dR_y/dr + hR_y = 0$

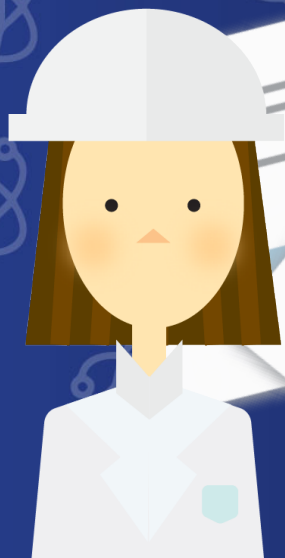
los índices  $\beta_m$  de las funciones de Bessel se obtienen al resolver la ecuación:

$$\beta_m J_{\gamma}(\beta_m b) + h J_{\gamma}'(\beta_m b) = 0$$

El Excel usado en la práctica resolvía esa ecuación.

$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$
1.0919	4.0192	7.1256	10.2508	13.3832	16.5191

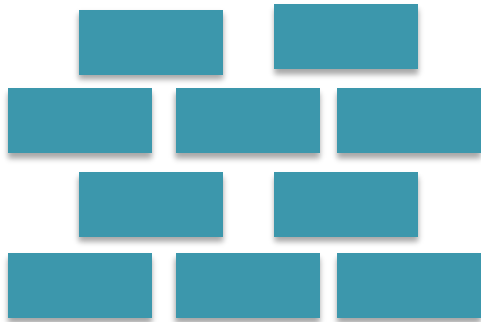
## ACTIVIDAD



Para diferentes valores de  $h$  y del radio  $b$  usar el programa desarrollado en Excel para calcular valores de  $\beta_m$



# CONSTRUCCIÓN DE LA SOLUCIÓN COMPLETA



$$T(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-\alpha \beta_m^2 t} R_0(\beta_m r)$$

Solución de la Ec Temporal

Solución de la Ec espacial

El valor de las  $C_m$  se determinará a partir de las condiciones de frontera e iniciales:  $T(r, 0) = F(r) = T_0$

$$C_m = \frac{1}{N(\beta_m)} \int_0^b r R_0(\beta_m r) F(r) dr$$

Donde  $N(\beta_m)$  es:

$$N(\beta_m) = \int_0^b r R_0^2(\beta_m r) dr$$

$$T(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2hT_0}{b} e^{-\alpha \beta_m^2 t} J_0(\beta_m r)$$

Donde:

$$t \frac{J_0(\beta_m r)}{(\beta_m^2 + h^2) J_0(\beta_m b)}$$

$h$  Es el coeficiente de convección

$T_0$  La temperatura inicial

$b$  El radio del cilindro

$\beta_m$  Los eigenvalores que se calculan a partir de las condiciones de frontera

$J_0$  La "Bessel cero"

Sustituyendo:

La solución final es análoga a la de la placa de espesor  $2H$ , se trata de una suma infinita de productos de la solución de la ecuación temporal por la solución de la ecuación espacial

La diferencia es que ahora las soluciones de la función espacial no son funciones trigonométricas, sino las funciones de Bessel.



## Las funciones de Bessel $J(\beta_m r)$

Son como las funciones de Fourier  
( $\text{Sen } \lambda_n t$  y  $\text{Cos } \lambda_n t$ )

Que permiten escribir una función solución de una ecuación diferencial en derivadas parciales con condiciones a la frontera, como suma de ellas.

Los matemáticos a este tipo de conjuntos de funciones, los llaman una base del espacio de soluciones de la ecuación diferencial.

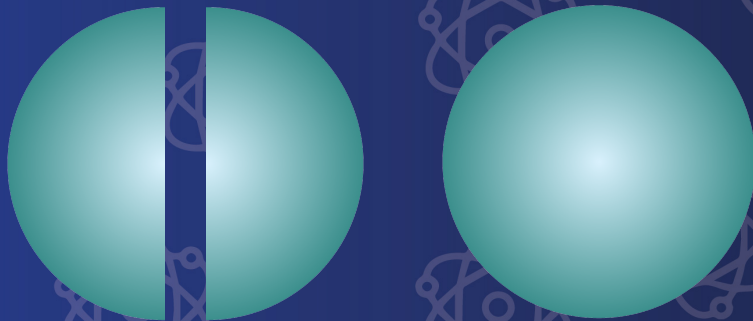


Las funciones de Bessel aparecen en problemas de simetría cilíndrica.

# COMENTARIOS

Los números  $\lambda_n$  o  $\beta_m$  que los etiquetan se llaman *Eigenvalores*.

Si la simetría es esférica aparecen otras funciones semejantes.



Dos buenas referencias para ver los detalles de los cálculos son el Kreider y el Ozisik.

COMENTARIOS

# GRÁFICA DE LA SOLUCIÓN ANALÍTICA USANDO EXCEL

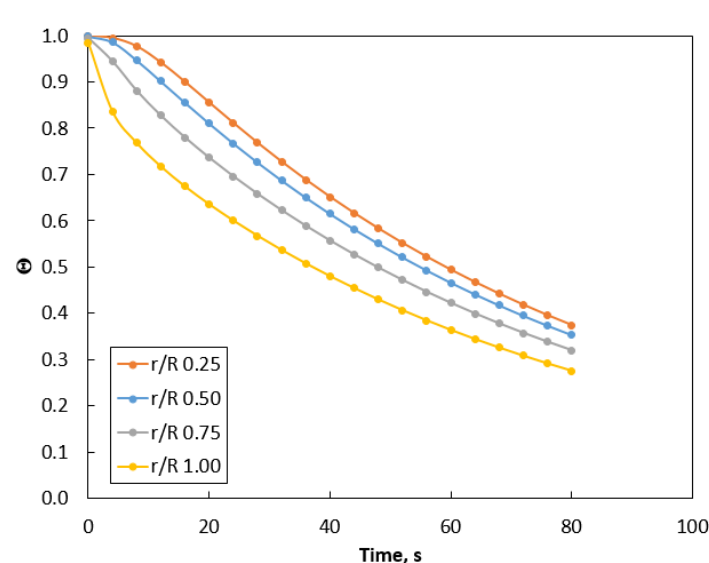
## DATOS DE ENTRADA

1	Data		
2	Dimentions		
3		cm	m
4	Diameter, D	15	1.50E-01
5	Radius, R	7.5	7.50E-02
6	Initial Conditions		
7		°C	K
8	Initial Temperature, Ti	500	773.15
9	Room Temperature, Ta	50	323.15
10	Thermal Properties		
11			$J s^{-1} m^{-1} °C^{-1}$
12	Thermal Conductivity, k	100.00	
13			$kg m^{-3}$
14	Density, ρ	1700.0	
15			$J kg^{-1} °C^{-1}$
16	Heat Capacity, Cp	900.0	
17			$J s^{-1} m^{-2} °C^{-1}$
18	Heat Transfer Coefficient, h	950	
19			$m^2 s^{-1}$
20	Thermal Diffusivity, α	6.54E-05	
21			
22	Biot Number, Bi	0.713	

## ECUACIÓN

$$\Theta = \frac{T(r,t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 J_1(\beta_n) J_0\left(\beta_n \frac{r}{R}\right)}{\beta_n J_0^2(\beta_n) + J_1^2(\beta_n)} \exp\left(-\beta_n^2 \frac{\alpha t}{L^2}\right)$$

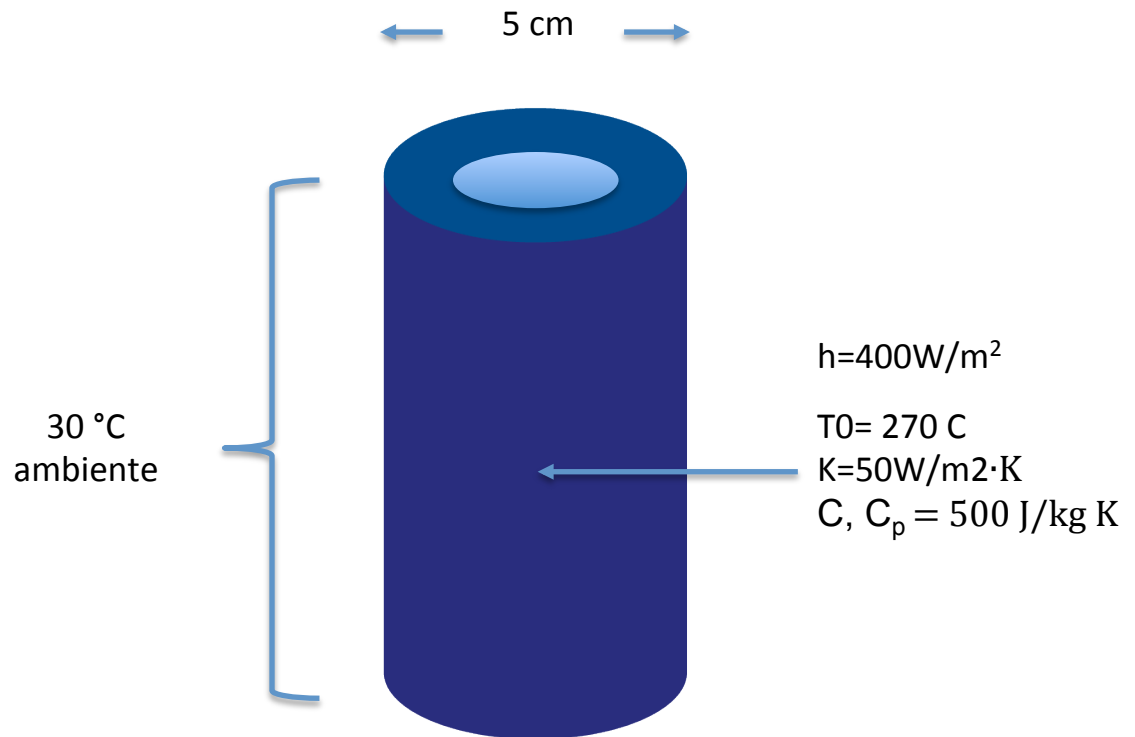
## RESULTADOS



$= (2/L5) * (((BESSELJ(L5,1)) * (BESSELJ((L5 * ($B25/$C5)),0)))) / (((BESSELJ(L5,0))^2) + ((BESSELJ(L5,1))^2)) * (EXP(-(L5^2 * $G32)))$

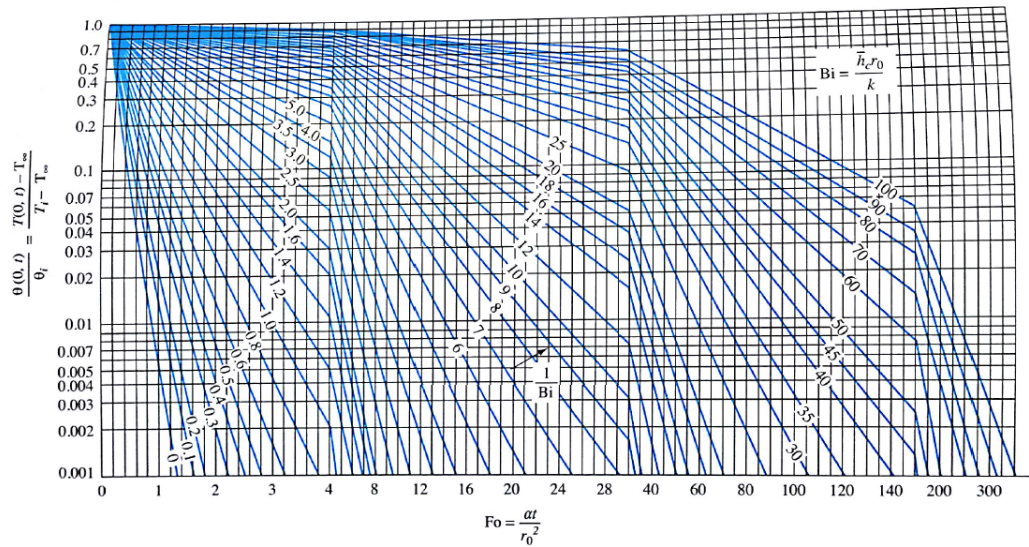
Un cilindro de 5 cm de diámetro que se encuentra a una temperatura uniforme de 800 C es colocado en un ambiente de 30 C. Encuentre la temperatura en el centro del cilindro después de 3 minutos. La conductividad  $k$  del metal es de 50W/m C, el coeficiente de transferencia de calor  $h$  es de 400 W/m<sup>2</sup> C,  $C_p$  de 500 J/kg K y  $\rho$  de 7,200 Kg/m<sup>3</sup>

## EJEMPLO

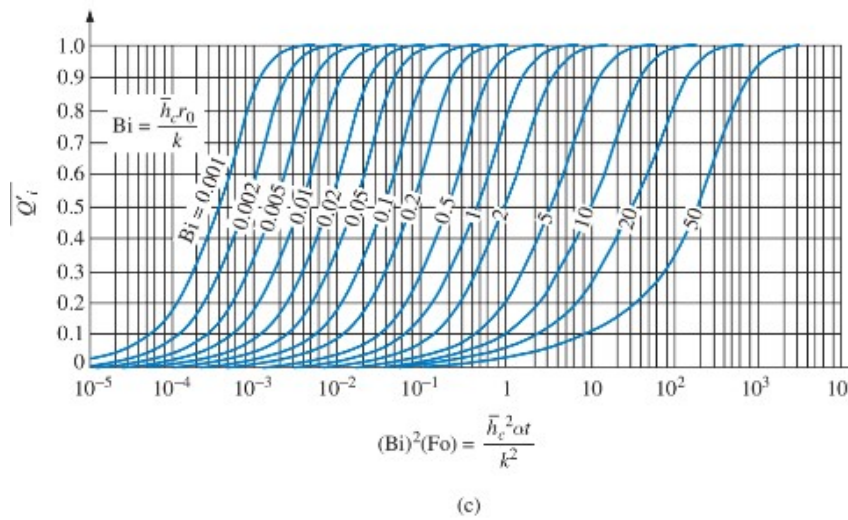


MÉTODO GRÁFICO  
Y ANÁLISIS  
MULTIDIMENSIONAL

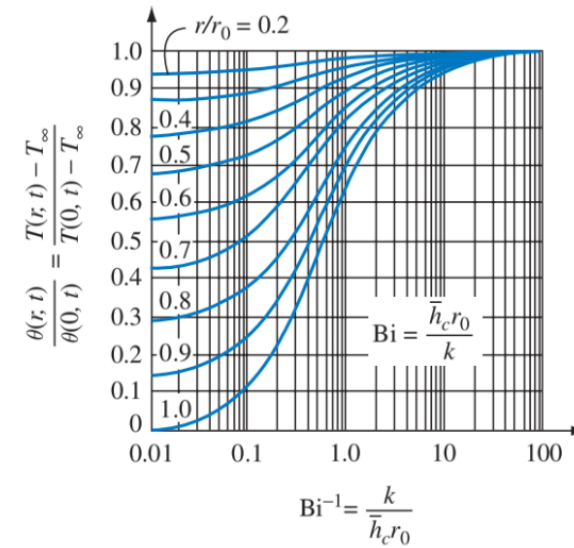
Tomada de: Kreith, Manglik  
y Bohn «Principios de  
transferencia de calor»



Hay en la gráfica  
tres variables  
adimensionales:  
Bi, Fo y  $\theta$



(c)

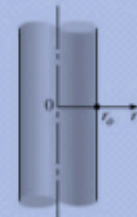




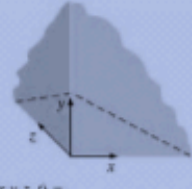
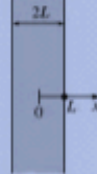

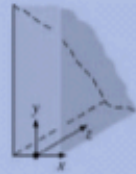


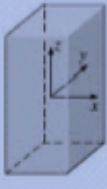


(b)

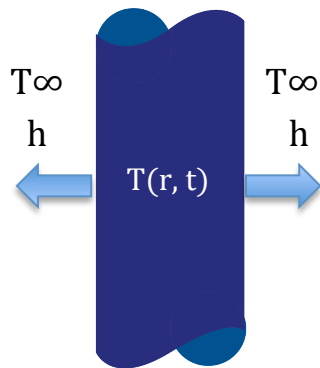
# SISTEMAS MULTIDIMENSIONALES

En la vida «real» los cilindros no son infinitamente largos. Se presentan efectos de borde.



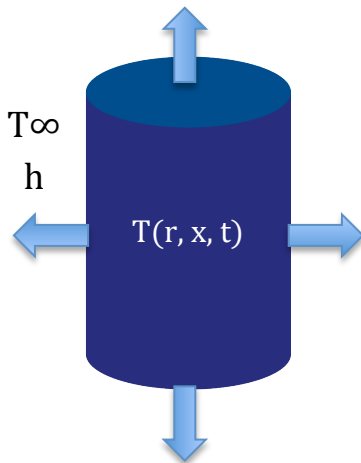
 <p><math>\theta(r,t) = \theta_{\text{cyl}}(r,t)</math> Infinite cylinder</p>	 <p><math>\theta(x,r,t) = \theta_{\text{cyl}}(r,t) \theta_{\text{semi-inf}}(x,t)</math> Semi-infinite cylinder</p>	 <p><math>\theta(x,r,t) = \theta_{\text{cyl}}(r,t) \theta_{\text{wall}}(x,t)</math> Short cylinder</p>
 <p><math>\theta(x,t) = \theta_{\text{semi-inf}}(x,t)</math> Semi-infinite medium</p>	 <p><math>\theta(x,y,t) = \theta_{\text{semi-inf}}(x,t) \theta_{\text{semi-inf}}(y,t)</math> Quarter-infinite medium</p>	 <p><math>\theta(x,y,z,t) = \theta_{\text{semi-inf}}(x,t) \theta_{\text{semi-inf}}(y,t) \theta_{\text{semi-inf}}(z,t)</math> Corner region of a large medium</p>
 <p><math>\theta(x,t) = \theta_{\text{wall}}(x,t)</math> Infinite plate (or plane wall)</p>	 <p><math>\theta(x,y,t) = \theta_{\text{wall}}(x,t) \theta_{\text{semi-inf}}(y,t)</math> Semi-infinite plate</p>	 <p><math>\theta(x,y,z,t) = \theta_{\text{wall}}(x,t) \theta_{\text{semi-inf}}(y,t) \theta_{\text{semi-inf}}(z,t)</math> Quarter-infinite plate</p>
 <p><math>\theta(x,y,t) = \theta_{\text{wall}}(x,t) \theta_{\text{wall}}(y,t)</math> Infinite rectangular bar</p>	 <p><math>\theta(x,y,z,t) = \theta_{\text{wall}}(x,t) \theta_{\text{wall}}(y,t) \theta_{\text{semi-inf}}(z,t)</math> Semi-infinite rectangular bar</p>	 <p><math>\theta(x,y,z,t) = \theta_{\text{wall}}(x,t) \theta_{\text{wall}}(y,t) \theta_{\text{wall}}(z,t)</math> Rectangular parallelepiped</p>

# SISTEMAS MULTIDIMENSIONALES



Cilindro largo

Las soluciones de problemas en una dimensión pueden usarse para construir soluciones de problemas de dos y tres dimensiones, usando un método de superposición multiplicativa.



Siempre y cuando el sólido no genere calor internamente, todas sus superficies estén expuestas al transporte convectivo del mismo fluido, a la misma temperatura y con el mismo coeficiente de transporte convectivo  $h$



## SOLUCIÓN GENERALIZADA

La solución puede generalizarse de la siguiente manera:

la solución para una geometría multidimensional es el producto de las soluciones de las geometrías unidimensionales cuya intersección forma el cuerpo multidimensional.

Por conveniencia las soluciones uni-dimensionales se denotan así:

$$\theta_{\text{pared}}(x,t) = (T(x,t) - T_{\infty} / T_i - T_{\infty})$$

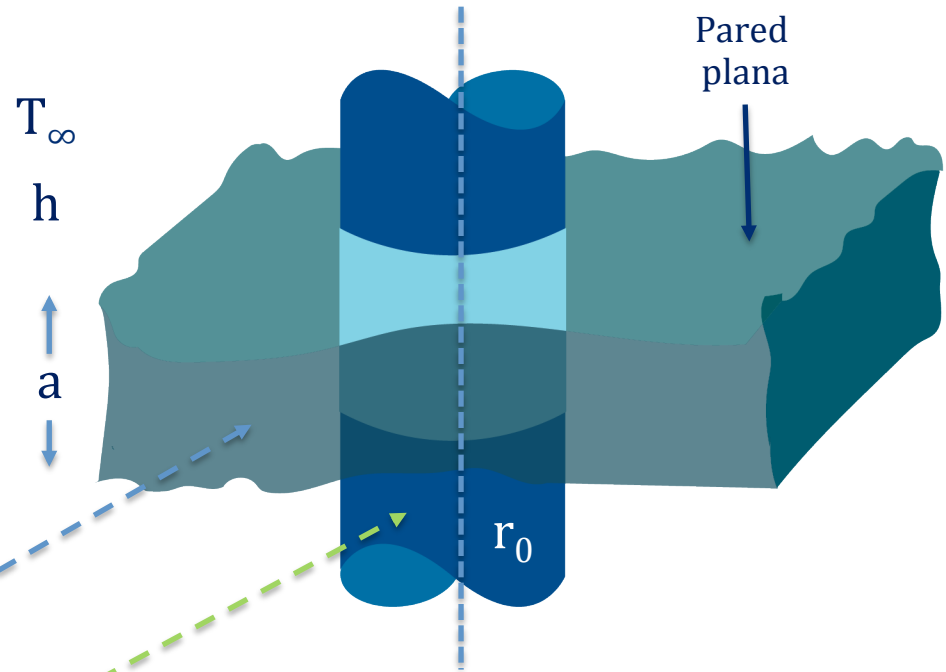
$$\theta_{\text{cilindro}}(r,t) = (T(r,t) - T_{\infty} / T_i - T_{\infty})$$

$$\theta_{\text{semi-inf}}(x,t) = (T(x,t) - T_{\infty} / T_i - T_{\infty})$$



# CILINDRO CORTO

- Altura  $a$  y radio  $r_0$
- Temperatura inicial  $T_i$
- No hay generación de calor
- Tiempo:  $t=0$ 
  - Convección  $T_\infty$
  - Coeficiente de transferencia  $h$
- Solución



$$= (T(x,t) - T_\infty / T_i - T_\infty)$$

$$\times (T(r,t) - T_\infty / (T(r,x,t) - T_i - T_\infty) - T_\infty / T_i - T_\infty)$$

# Algunos casos de interés

Tomados del Kreith.

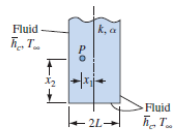
## Geometria

## Magnitud adimensional temperatura en punto P

## Geometria

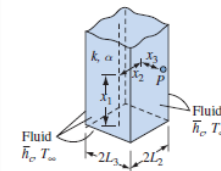
## Magnitud adimensional temperatura en punto P

Semi-infinite plate



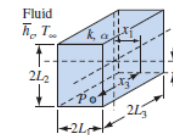
$$\frac{\theta_p(x_1, x_2)}{\theta_i} = P(x_1)S(x_2)$$

Semi-infinite rectangular bar



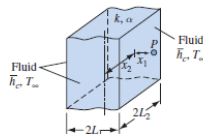
$$\frac{\theta_p(x_1, x_2)}{\theta_i} = P(x_1)P(x_2)$$

Rectangular parallelepiped



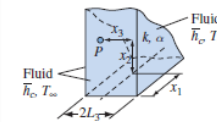
$$\frac{\theta_p(x_1, x_2, x_3)}{\theta_i} = P(x_1)P(x_2)P(x_3)$$

Infinite rectangular bar



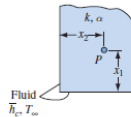
$$\frac{\theta_p(x_1, x_2)}{\theta_i} = S(x_1)S(x_2)$$

One-quarter infinite plate



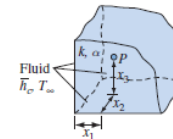
$$\frac{\theta_p(x_1, x_2, x_3)}{\theta_i} = S(x_1)S(x_2)P(x_3)$$

One-quarter infinite solid



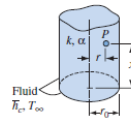
$$\frac{\theta_p(x, r)}{\theta_i} = S(x)C(r)$$

One-eighth infinite plate



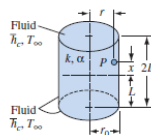
$$\frac{\theta_p(x_1, x_2, x_3)}{\theta_i} = S(x_1)S(x_2)S(x_3)$$

Semi-infinite cylinder



$$\frac{\theta_p(x, r)}{\theta_i} = P(x)C(r)$$

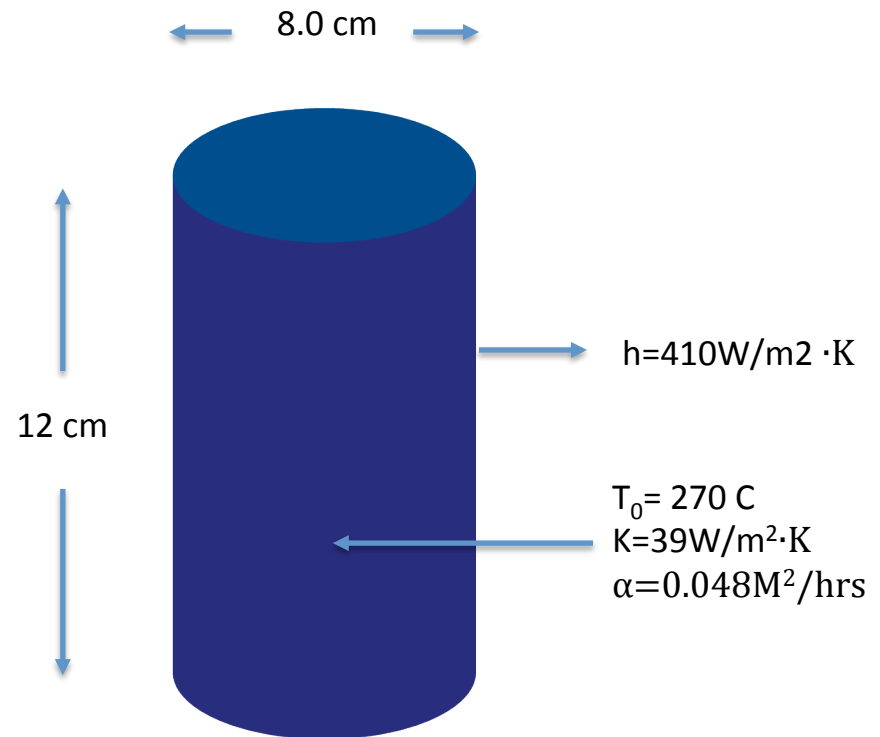
Finite cylinder



Un cilindro de 8.0 cm de diámetro exterior y 12 cm de longitud que se encuentra a una temperatura de 270 C se coloca en un ambiente convectivo ( $h = 410 \text{ W/m}^2\text{K}$ ) a 50 C. Las propiedades del metal del que está hecho el cilindro son  $\alpha = 0.048 \text{ m}^2/\text{hr}$  y  $k = 39 \text{ W/m K}$ .

Determine la temperatura en el centro del cilindro después de 5 minutos.

## EJEMPLO



# SOLUCIÓN

La solución de este caso multidimensional será el producto de las soluciones de un cilindro infinitamente largo y una placa (slab). Las siguientes láminas muestran la solución para estos dos casos:

## Temperaturas transitorias adimensionales y flujo de calor para un cilindro largo

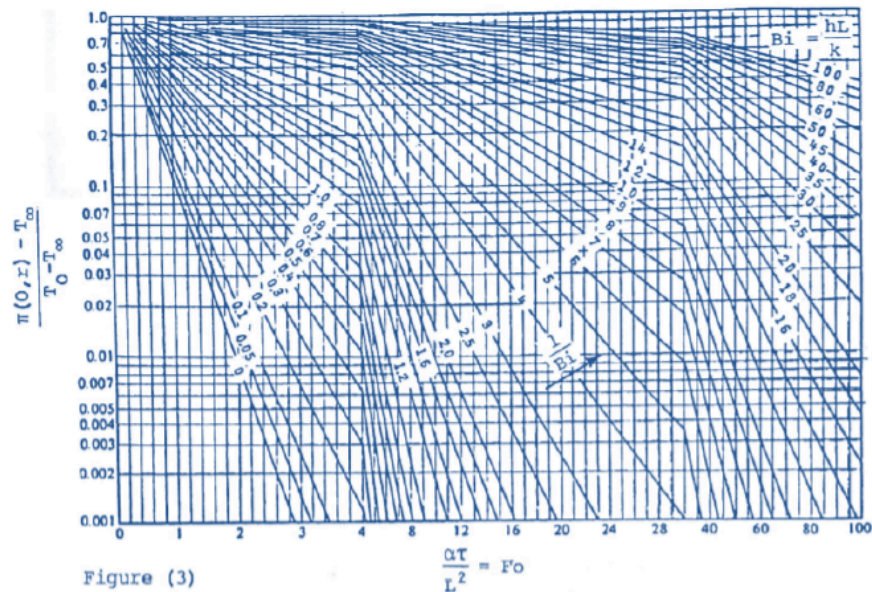
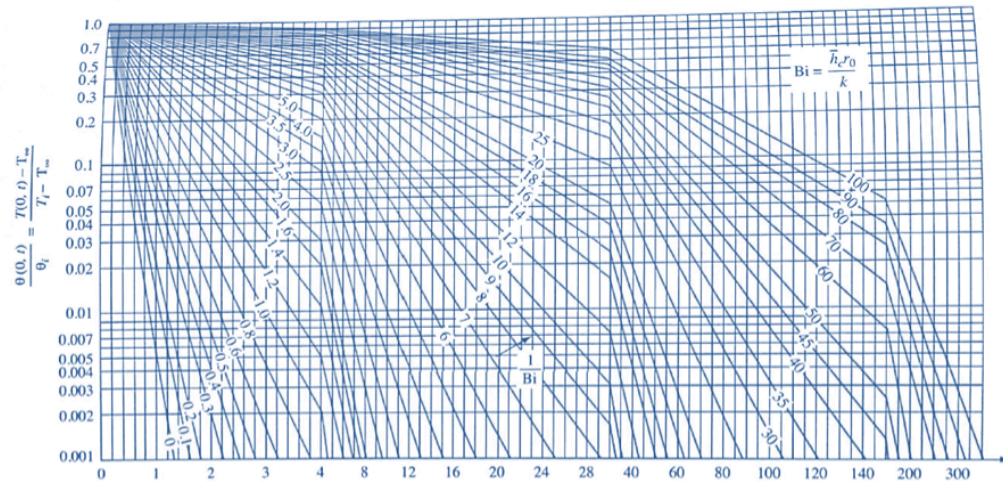


Figure (3)

## Para el cilindro largo

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \\
 &hr_0/2k \\
 &= (410) \\
 &(0.04)/2(39) \\
 &= 0.21
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1/2B_1 &= \\
 1/2(0.21) &= 2.38
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_0 &= \alpha\tau/ \\
 &r_0^2 \\
 &= (0.048) \\
 &(0.0833)/ \\
 &(\cancel{0.04})^2
 \end{aligned}$$

$$T(O,\tau) - T_\infty / T_0 - T_\infty = 0.145$$



## Para la placa de espesor $2L$

El numero de Biot esta dado por:

$$B_1 = hL/k$$

$$= (410) \\ (0.06)/39$$

$$1/B_1 = 1/0.63(1.06)$$

$$= 1.585$$

$$F_0 = hL/k$$

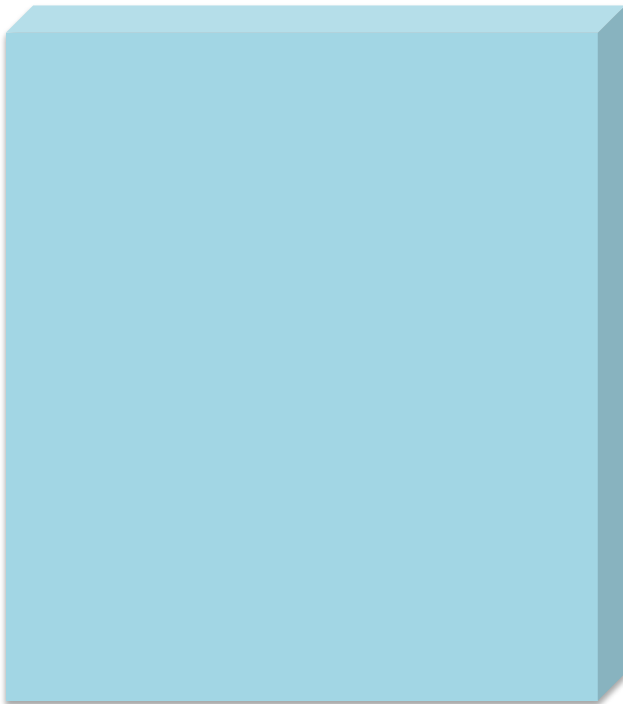
$$= (0.048) \\ (0.0833)/$$

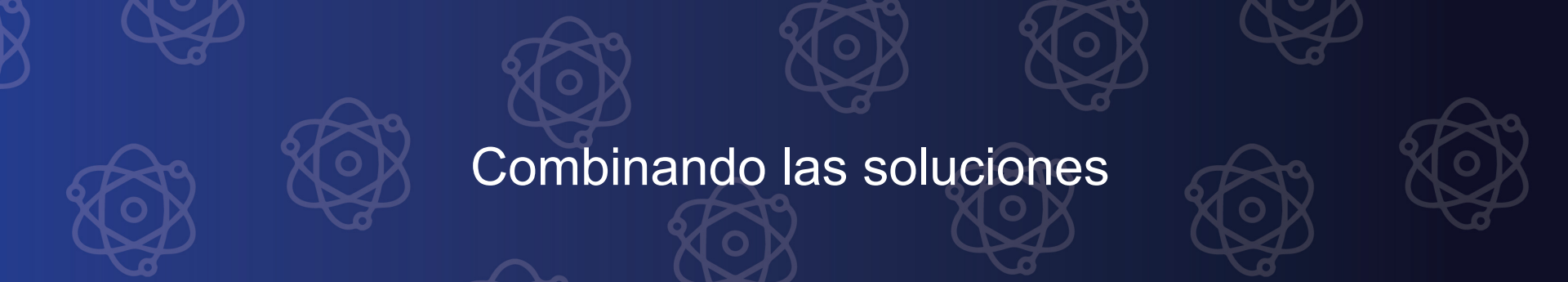
Por  $\alpha\tau/L^2 = 1.11$  y  $1/B_1$   
 $= 1.585$

$$S(0,\tau) = T(0,\tau)$$

$$-T_\infty /$$

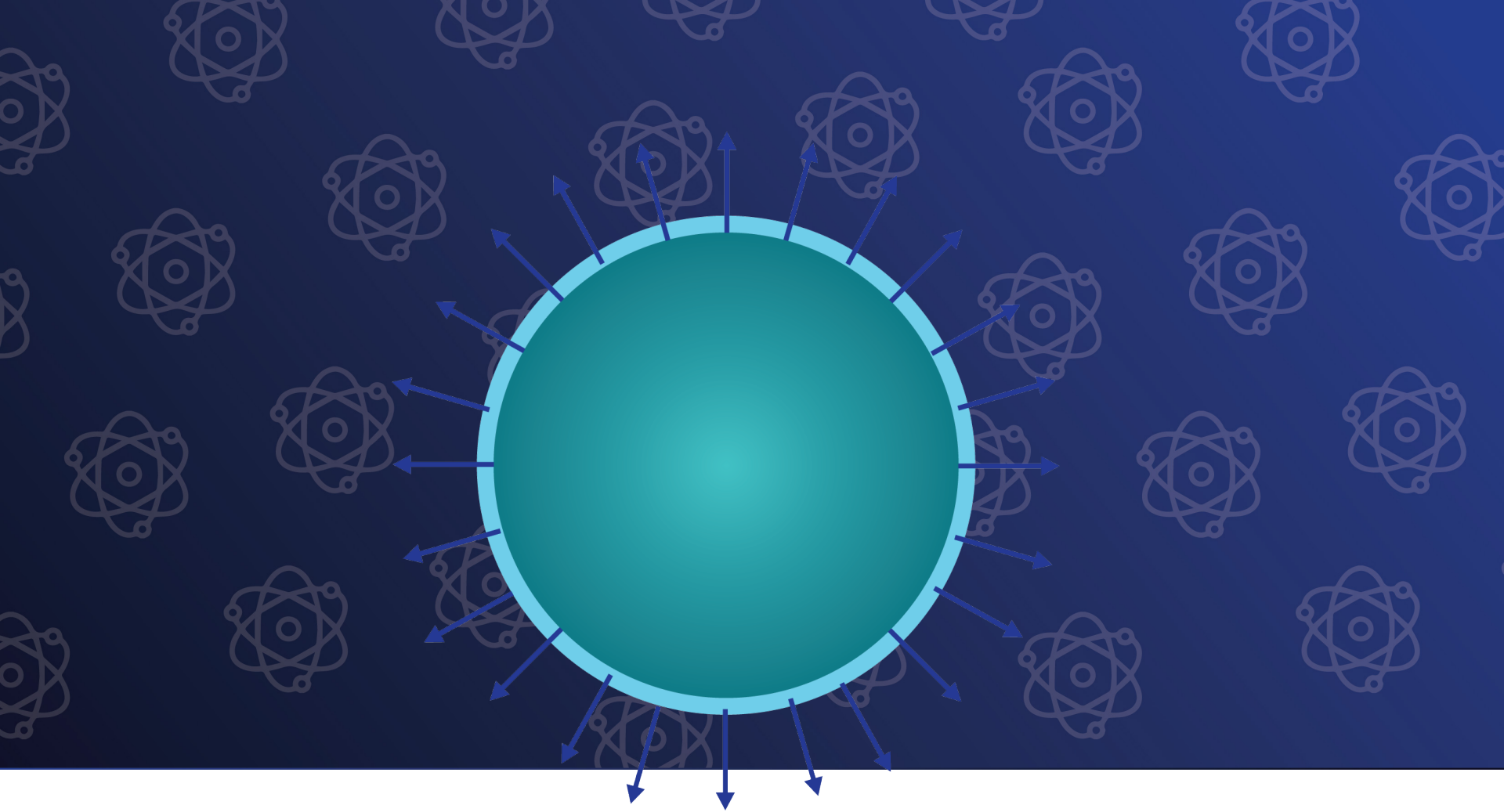
$$T_0 - T_\infty$$





# Combinando las soluciones





**ESFERA CONDUCTORA**



## ECUACIÓN DE DIFUSIÓN EN COORDENADAS ESFÉRICAS

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$$

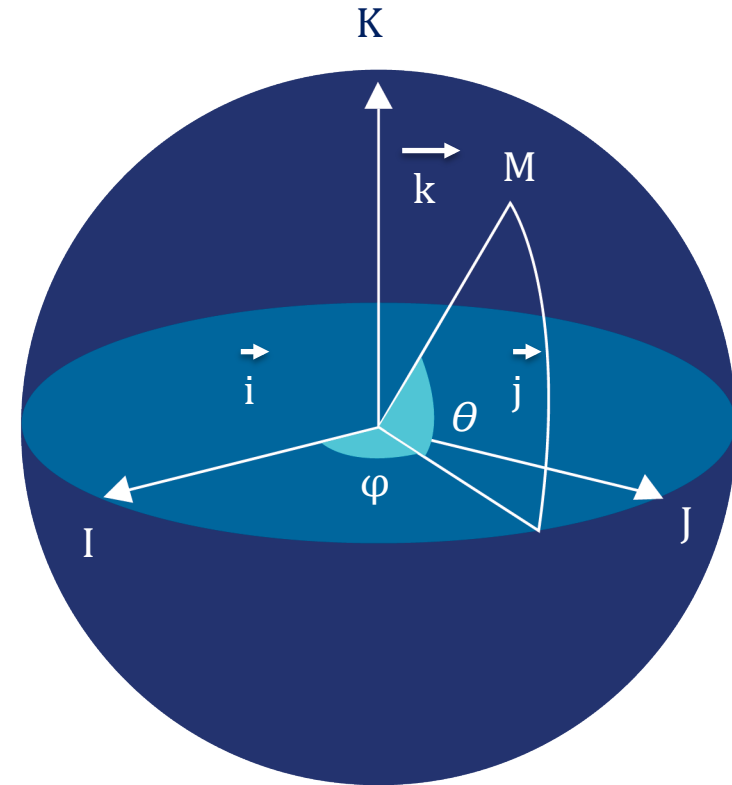
«Misma» ecuación

Pero en geometría esférica

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right)$$

### Condiciones a la frontera.

- La frontera pierde calor por convección
- La frontera se considera aislada



# 1

## PRIMER CAMBIO DE VARIABLE

Con el cambio de variable  $\mu = \cos\theta$   $v = r^{1/2}T$

La ecuación se transforma en:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{4} \frac{V}{r^2} + \frac{1}{r^2}$$

Al separar las variables, habrá tres ecuaciones espaciales, una para cada coordenada. Y otra más para la coordenada temporal

ECUACIONES  
SEPARADAS EN  
COORDENADAS  
ESFÉRICAS

NOMBRE	ECUACION	SOLUCIONES
	$d^2\Phi(\phi)/d\phi^2 + m^2\Phi(\phi) = 0$	$\Phi(\phi) = \text{Sen}(m\phi)$ $\Phi(\phi) = \text{Cos}(m\phi)$
BESSEL	$d^2R/dr^2 + 1/r dR/dr + [\lambda^2 - (n+1/2)^2 / r^2] R = 0$	$R(r) = J_{n+1/2}(\lambda r)$ $R(r) = Y_{n+1/2}(\lambda r)$
ASOCIADA DE LEGENDRE	$d/d\mu [(1-\mu^2)dM/d\mu] + [n(n+1) - m^2/(1-\mu^2)] M = 0$	$M(\mu) = P_{n,m}(\mu)$ $M(\mu) = Q_{n,m}(\mu)$
TEMPORAL	$d\Gamma(t)/dt + \alpha\lambda^2\Gamma(t) = 0$	$\Gamma(t) = e^{-\alpha\lambda^2 t}$

## Ejemplo Dependencia en r y t.

Una esfera de radio  $r = b$  tiene una temperatura inicial descrita por la función  $F(r)$  y para tiempos  $t > 0$  la frontera  $r = b$  disipa calor por convección hacia el medio ambiente que se encuentra a 0 K. Encontrar  $T(r, t)$  sobre la esfera para  $t > 0$

En este caso la ecuación de transferencia toma la forma:

$$1/r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (0 < r < b, t > 0)$$

Con la condición de frontera:

$$\frac{\partial T}{\partial r} + hT = 0 \quad r = b, \quad t > 0$$

Y condición inicial:

$$T = F(r) \quad t = 0 \quad 0 < r < b$$

# Solución de la ecuación

Usando la transformación:

$$U(r,t) = rT(r,t)$$

La ecuación toma la forma:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Con las condiciones a la frontera:



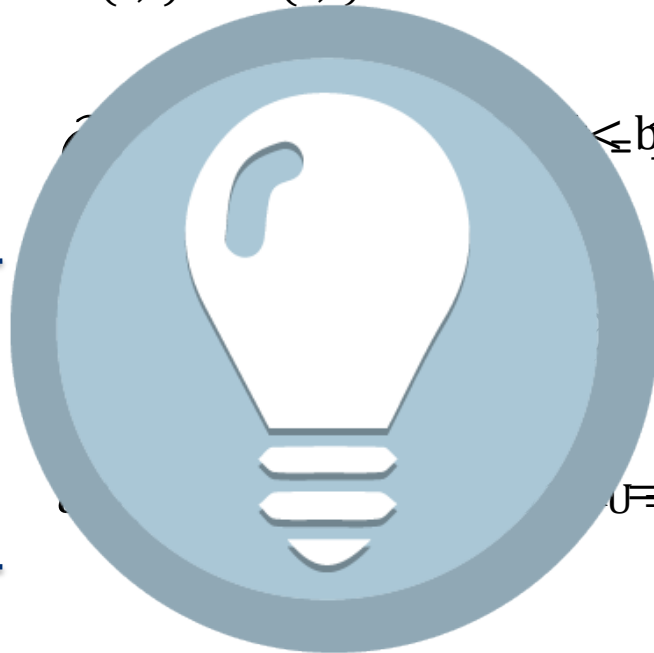
$$T = f_1 \quad t > 0$$

$$T = f_2 \quad t > 0$$

e inicial

$$U = rF(r)$$

$$t = 0, \quad a < r < b$$



Realizamos un nuevo cambio de variable  $x=r-a$

Con lo que la ecuación toma la forma

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + (a+x)g(x+a)/\hbar^2 \alpha^2 U = \frac{\partial U}{\partial t}$$

y las condiciones a la Frontera e inicial son:

$$-\frac{\partial U}{\partial r} + K_1 U = af_1 \quad x=0, \quad t>0$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} + K_2 U = af_2 \quad x=L, \quad t>0$$

$$U = (x+a) F(x+a) \quad t=0, \quad 0<x<L$$

NUEVO CAMBIO DE  
VARIABLE

## SOLUCIÓN

Este problema es idéntico al de una placa de espesor  $L$ , que puede ser resuelto con las técnicas ya estudiadas anteriormente y cuya solución es:

$$R(\beta_m r) = \beta_m \cos \beta_m (r-a) + K_1 \sin \beta_m (r-a)$$

Con  $K_1 = h_1 + 1/a$

Y  $\tan \beta_m (b-a) = \beta_m (K_1 + K_2) / \beta_m^2 @m - 1$

# CONSTRUCCIÓN DE LA SOLUCIÓN COMPLETA

$$T(r,t) = \sum_m C_m \frac{1}{N(\beta m)} \int_a^b \frac{r^2 \mu \uparrow b}{R(\beta_m^2 r) F(r^2) R(\beta m r^2)} dr^2$$

Solución de la Ec Temporal

Solución de la Ec espacial

El valor de las  $C_m$  se determinará a partir de las condiciones de frontera e iniciales:  $T(r, 0) = F(r) = T_0$

$$C_m = \frac{1}{N(\beta m)} \int_a^b r^2 \mu \uparrow b R(\beta m r) F(r) dr$$

Nota: Se integra entre a y b para permitir analizar el caso de una esfera hueca.

$$\frac{1}{N(\beta m)} = \frac{2}{(\beta^2 @m + K^2 @1) \left[ \frac{\Gamma(h-1/a/b) + K^2 / (\beta^2 @m + K^2 @2)}{+K1} \right]}$$



## ESFERA AISLADA

Cuando ambas fronteras  $r = a$  y  $r = b$  están aisladas  $h_1 = h_2 = 0$ . En ese caso  $\beta_0 = 0$  también es un *eigenvalor*. En ese caso el término:

$$\frac{3}{b^3} \int_a^b r^2 F(r) dr$$

(Debe ser agregado a la solución.)

Este término implica que una vez transcurrido el estado transitorio, la temperatura del estado estacionario en el medio, será el promedio de la distribución inicial de temperatura  $F(r)$ , sobre el volumen de la esfera aislada,

## ACTIVIDAD



Usa el Excel que se ha utilizado para resolver el problema del cilindro y sustitúyelo por una esfera de la misma masa, hecha del mismo material.

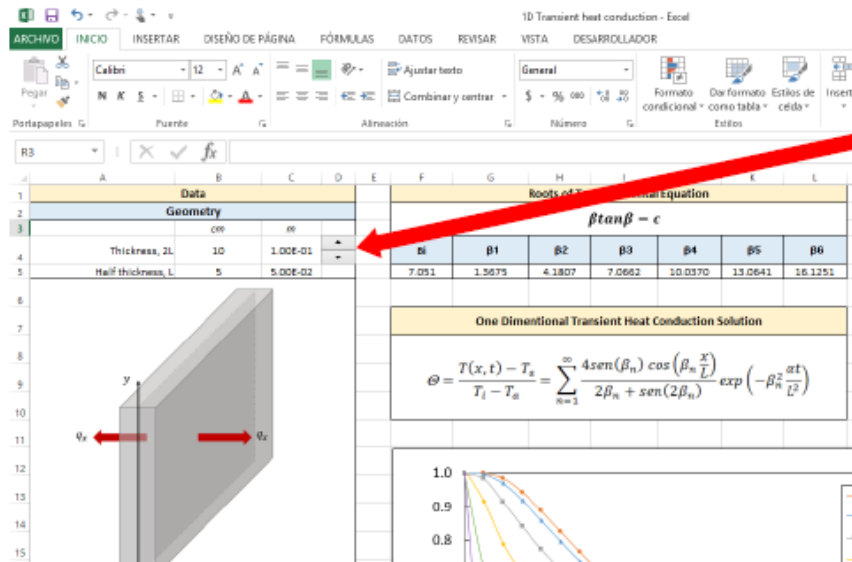
# HOJA DE CÁLCULO

Hoja de Cálculo: Transferencia de calor en edo. no estacionario (medio finito)

Geometría: Pared plana infinitamente larga

M. en I. Roberto Cruces Reséndez

Dr. Bernardo Hernández Morales



En el cuadro “Geometría” se seleccionan las dimensiones de la placa (en este caso el espesor) con ayuda del controlador colocado a un costado. Es posible dar *click* en la celda y poner el valor requerido.

# Ejemplo de uso del Excel

Data		
Dimensions		
	cm	m
Diameter, D	15	1.50E-01
Radius, R	7.5	7.50E-02
Initial Conditions		
	°C	K
Initial Temperature, T <sub>i</sub>	500	773.15
Room Temperature, T <sub>r</sub>	50	323.15
Thermal Properties		
	J s <sup>-1</sup> m <sup>-1</sup> °C <sup>-1</sup>	
Thermal Conductivity, k	100.00	
	kg m <sup>-3</sup>	
Density, ρ	1700.0	
	J kg <sup>-1</sup> °C <sup>-1</sup>	
Heat Capacity, Cp	300.0	
	J s <sup>-1</sup> m <sup>-2</sup> °C <sup>-1</sup>	
Heat Transfer Coefficient, h	350	
	m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	
Thermal Diffusivity, α	6.54E-05	
Biot Number, Bi	0.713	
	r, m	r/R
1	1.88E-02	0.25
2	3.75E-02	0.50
3	5.63E-02	0.75
4	7.50E-02	1.00

Roots of Transcendental Equation						
$\beta J_1(\beta) - c J_0(\beta) = 0$						
Bi	β <sub>1</sub>	β <sub>2</sub>	β <sub>3</sub>	β <sub>4</sub>	β <sub>5</sub>	β <sub>6</sub>
0.71	1.0919	4.0192	7.1256	10.2508	13.3832	16.5191

**One Dimensional Transient Heat Conduction Solution**

$$\theta = \frac{T(r,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 J_1(\beta_n) J_0(\beta_n \frac{r}{R})}{\beta_n [J_1(\beta_n) + J_0(\beta_n)]} \exp(-\beta_n^2 \frac{\alpha t}{R^2})$$

Graph 1: Dimensionless temperature θ vs Time, s. Curves for r/R = 0.25 (red), 0.50 (blue), 0.75 (grey), 1.00 (yellow).

Graph 2: Temperature, °C vs Time, s. Curves for r/R = 0.25 (red), 0.50 (blue), 0.75 (grey), 1.00 (yellow).

r/R	0.25																		
t, [s]	Fo	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	θ(r,t)	θ(r,t)	θ(r,t)	θ(r,t)	θ(r,t)	θ(r,t)	T(r,t)	T(r,t)	T(r,t)	T(r,t)	T(r,t)	T(r,t)
0.0	0.000	1.13382	-0.1718	0.03575	0.00475	-0.0144	0.01148	1.13	0.96	1.00	1.00	1.00	1.00	560.22	482.32	493.01	501.15	494.68	499.85
4.0	0.046	1.0727	-0.0811	0.00338	3.6E-05	-3E-06	3.6E-08	1.07	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	532.72	496.23	497.75	497.77	497.76	497.76
8.0	0.093	1.01488	-0.0383	0.00032	2.7E-07	-8E-10	1.1E-13	1.01	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	506.70	489.47	489.62	489.62	489.62	489.62
12.0	0.139	0.96017	-0.0181	3E-05	2.1E-09	-2E-13	3.4E-19	0.96	0.94	0.94	0.94	0.94	0.94	482.08	473.95	473.96	473.96	473.96	473.96
16.0	0.186	0.90841	-0.0085	2.8E-06	1.6E-11	-5E-17	1.1E-24	0.91	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	458.79	454.95	454.95	454.95	454.95	454.95
20.0	0.232	0.85944	-0.004	2.7E-07	1.2E-13	-1E-20	3.3E-30	0.86	0.86	0.86	0.86	0.86	0.86	436.75	434.34	434.34	434.34	434.34	434.34
24.0	0.279	0.81311	-0.0019	2.5E-08	8.9E-16	-3E-24	1E-35	0.81	0.81	0.81	0.81	0.81	0.81	415.90	415.05	415.05	415.05	415.05	415.05
28.0	0.325	0.76928	-0.0009	2.4E-09	6.8E-18	-7E-28	3.2E-41	0.77	0.77	0.77	0.77	0.77	0.77	396.18	395.77	395.77	395.77	395.77	395.77
32.0	0.372	0.72761	-0.0004	2.3E-10	5.1E-20	-2E-31	9.9E-47	0.73	0.73	0.73	0.73	0.73	0.73	377.52	377.33	377.33	377.33	377.33	377.33
36.0	0.418	0.68858	-0.0002	2.1E-11	3.9E-22	-4E-35	3.1E-52	0.69	0.69	0.69	0.69	0.69	0.69	359.86	359.77	359.77	359.77	359.77	359.77
40.0	0.465	0.65146	-9E-05	2E-12	2.9E-24	-1E-38	3.5E-58	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	343.16	343.12	343.12	343.12	343.12	343.12
44.0	0.511	0.61634	-4E-05	1.9E-13	2.2E-26	-2E-42	3E-63	0.62	0.62	0.62	0.62	0.62	0.62	327.35	327.33	327.33	327.33	327.33	327.33
48.0	0.558	0.58312	-2E-05	1.8E-14	1.7E-28	-6E-46	3.2E-63	0.58	0.58	0.58	0.58	0.58	0.58	312.40	312.39	312.39	312.39	312.39	312.39

# REFERENCIAS

Kreider. Análisis lineal.  
OZISIK, M.N. «Heat Conduction»

